5.7 INVERZE MATICE

Dělení matic není definováno, avšak je definován pojem inverzní matice k regulární čtvercové matici. Matice $\boldsymbol{X}$ je inverzní maticí k $\boldsymbol{A}$, jestliže platí

$$\boldsymbol{A} . \boldsymbol{X} = \boldsymbol{I} ;$$

kde $\boldsymbol{I}$ je jednotková matice a značíme $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

5.7.1 Inverze matice pomocí determinantů

Ke každé čtvercové matici můžeme určit její determinant. Ke každému prvku determinantu můžeme určit jeho subdeterminant tak, že z původního determinantu vyloučíme ten řádek a sloupec, ve kterém leží prvek, jehož subdeterminant hledáme. Když tento násobíme $(-1)^{i+j}$, kde i a j jsou pořadová čísla řádku a sloupce příslušného prvku, dostaneme doplněk D_{ij} k prvku a_{ij} determinantu $\boldsymbol{A}$. Tak například matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{bmatrix} \text{ má determinant a doplňky } \quad \begin{aligned} D &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ D_{11} &= a_{22} \\ D_{12} &= -a_{21} \\ D_{21} &= -a_{12} \\ D_{22} &= a_{11} . \end{aligned}$$

Inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ je dána transponovanou maticí doplňků dělenou determinantem matice. V uvedeném příkladě tedy

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} D_{11}, & D_{21} \\ D_{12}, & D_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} a_{22}, & -a_{12} \\ -a_{21}, & a_{11} \end{bmatrix}$$

Jiný způsob, vhodnější pro programování na samočinném počítači, je eliminační metoda.

5.7.2 Eliminační metoda inverze matice

Mějme matici $\boldsymbol{A}$ a vytvořme k této matici inverzní matici $\boldsymbol{A}^{-1}$ následujícím způsobem:

Zvolme matici $\boldsymbol{X}$, která je maticí jednotkovou.

Potom na řádky matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{X}$ aplikujeme eliminační postup tak, aby z matice $\boldsymbol{A}$ vznikla jednotková matice. Po této eliminaci na matici $\boldsymbol{X}$, původně jednotkové, bude inverzní matice $\boldsymbol{A}$. Postup inverze bude jasnější z uvedeného schématu.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{bmatrix} ; \quad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_{11}, & x_{12}, & x_{13} \\ x_{21}, & x_{22}, & x_{23} \\ x_{31}, & x_{32}, & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

1. krok: Eliminujeme první řádek

$$^{1}a_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} ; \quad ^{1}x_{1j} = \frac{x_{1j}}{a_{11}} ; \quad j = 1, 2, 3$$

další řádky

$$ {}^1a_{ij} = a_{ij} - a_{i1} \,.\, {}^1a_{1j} \;; \quad {}^1x_{ij} = x_{ij} - a_{i1} \,.\, {}^1x_{1j} \;; \quad i = 2, 3 \;; \quad j = 1, 2, 3 \,, $$

pak tedy

$$ {}^1\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1, & {}^1a_{12}, & {}^1a_{13} \\ 0, & {}^1a_{22}, & {}^1a_{23} \\ 0, & {}^1a_{32}, & {}^1a_{33} \end{bmatrix}; \quad {}^1\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} {}^1x_{11}, & {}^1x_{12}, & {}^1x_{13} \\ {}^1x_{21}, & {}^1x_{22}, & {}^1x_{23} \\ {}^1x_{31}, & {}^1x_{32}, & {}^1x_{33} \end{bmatrix} $$

2. krok: Eliminuje druhý řádek

$$ {}^2a_{2j} = \frac{{}^1a_{2j}}{{}^1a_{22}} \;; \quad {}^2x_{2j} = \frac{{}^1x_{2j}}{{}^1a_{22}} \;; \quad j = 1, 2, 3 \,, $$

$$ {}^2a_{ij} = {}^1a_{ij} - {}^1a_{i2}{}^2a_{2j} \;; \quad {}^2x_{ij} = {}^1x_{ij} - {}^1a_{i2}\,{}^2x_{2j} \;; \quad i = 1, 3 \;; \quad j = 1, 2, 3 \,, $$

pak tedy

$$ {}^2\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & {}^2a_{13} \\ 0, & 1, & {}^2a_{23} \\ 0, & 0, & {}^2a_{33} \end{bmatrix}; \quad {}^2\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} {}^2x_{11}, & {}^2x_{12}, & {}^2x_{13} \\ {}^2x_{21}, & {}^2x_{22}, & {}^2x_{23} \\ {}^2x_{31}, & {}^2x_{32}, & {}^2x_{33} \end{bmatrix} $$

3. krok: Eliminuje třetí řádek:

$$ {}^3a_{3j} = \frac{{}^2a_{3j}}{{}^2a_{33}} \;; \quad {}^3x_{3j} = \frac{{}^2x_{3j}}{{}^2a_{33}} \;; \quad j = 1, 2,3 \,, $$

$$ {}^3a_{ij} = {}^2a_{ij} - {}^2a_{i3}\,{}^3a_{3j} \;; \quad {}^3x_{ij} = {}^2x_{ij} - {}^2a_{i3}\,{}^3x_{3j} \;; \quad i = 1, 2 \;; \quad j = 1, 2, 3 \,, $$

$$ {}^3\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}; \quad {}^3\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} {}^3x_{11}, & {}^3x_{12}, & {}^3x_{13} \\ {}^3x_{21}, & {}^3x_{22}, & {}^3x_{23} \\ {}^3x_{31}, & {}^3x_{32}, & {}^3x_{33} \end{bmatrix} $$

chyba - musí být jednotková

Tedy ${}^3\boldsymbol{X}$ je inverzní matice k matici $\boldsymbol{A}$.

Při výpočtu inverze lze snadno určit hodnotu determinantu, neboť platí

$$ \det A = a_{11}, {}^1a_{22}, {}^2a_{33}, \ldots, {}^{(k-1)}a_{kk}, \ldots, {}^{(n-1)}a_{nn} $$

Například pro $n = 4$ tedy platí

$$ \det A = a_{11}, {}^1a_{22}, {}^2a_{33}, {}^3a_{44} \,, $$

respektive

$$ \det A = (-1)^m, a_{11}, {}^1a_{22}, {}^2a_{33}, {}^3a_{44} \,, $$

jestliže zaměníme m řádků.

Zadání:

Určeme inverzní matici k matici $\boldsymbol{A}$ stupně $n_{\max} = 20$.

Čtení prvků matice $\boldsymbol{A}$ proveďme po řádcích. Program sestavme tak, aby jednotková matice $\boldsymbol{X}$ byla vytvořena přímo programem. Stejně jako v (5.6), ukáže-li se, že v některém kroku ${}^{(i-1)}a_{ii} = 0$, resp. je velmi malé číslo, vyměníme pořadí řádků tak, aby v levém horním rohu byl maximální prvek v absolutní hodnotě. Test singularity provedeme pro $|a_{\max}| \leqslant \varepsilon$, $\varepsilon = 0{,}000001$.

$$ 1 \cdot 10^{-\left(\mathrm{trunc}\left(\frac{\text{počet platných číslic}}{2}\right)\right)} $$